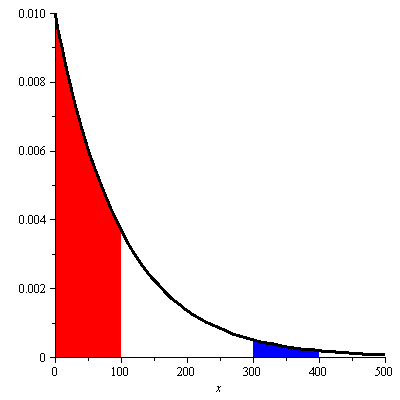
**Tema 3.2.1. Distribución Exponencial.**

**Motivación del tema.** La distribución exponencial se utiliza para medir la probabilidad de funcionamiento, durante un periodo de tiempo, de un foco( circuito, computadora, televisión, licuadora, etc. ). Por ejemplo, la duración(en años) de un tubo que transporta el agua del sistema cutzamala a la ciudad de méxico

cierto componente electrónico es una variable aleatoria con función de densidad



La probabilidad de que el componente dure entre 0 y 100 horas se calcula como

Mientras que la probabilidad de que dure entre 300 y 400 horas es

Esto está de acuerdo con la realidad, pues el componente tiene mayor probabilidad de funcionar al principio cuando se compró.

**Definición 1. Distribución Exponencial.** Una variable aleatoria tiene una distribución exponencial con parámetro si su función de densidad es

**Ejemplo 1.** La duración(en horas) de cierto componente electrónico es una variable aleatoria con función de densidad

Tres de estos componentes trabajan independientemente en una pieza de un equipo. El equipo falla si al menos 2 de los componentes fallan. Calcule la probabilidad de que el equipo funcione al menos durante 200 horas sin fallar.

**Solución.** Sean y la duración de los componentes 1,2 y 3, entonces la probabilidad de que el equipo funcione al menos durante 200 horas se da cuando

Como las variables y tienen la misma función de densidad entonces la expresión anterior es igual a:

**Teorema 1. Propiedades de la Distribución Exponencial.**

|  |  |
| --- | --- |
| Esperanza |  |
| Varianza |  |
| Función Generadora de Momentos |  |

**Ejemplo 2.** El tiempo que tarda en realizarse cierta tarea en la construcción de una casa es una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial con una media de 10 horas. El costo para completar esta tarea es:

Encontrar el valor esperado de .

**Solución.** Para la esperanza

Calculamos las esperanzas de con la función generadora de momentos, utilizando la tabla, con tenemos que entonces

Sustituyendo estos valores en la esperanza del costo obtenemos

Para la varianza sabemos que:

Desarrollando el cuadrado y sustituyendo el valor de la segunda esperanza, que ya calculamos, obtenemos:

Para terminar de calcular la varianza sólo debemos calcular y utilizando la función generadora de momentos

Por lo tanto ya podemos calcular la varianza como:

**Observación 2. Propiedad de Amnesia de la Distribución Exponencial.** De nuevo si es el tiempo de duración de un componente electrónico entonces se tienen las siguientes interpretaciones de las probabilidades

=probabilidad de que el componente electrónico

dure horas más dado que ya estuvo funcionando horas

probabilidad de que el componente electrónico

dure horas desde su compra

La propiedad de amnesia de la distribución exponencial nos dice que estas dos probabilidades son iguales, es decir, un componente electrónico usado es tan confiable como uno nuevo.

**Ejemplo 3. Propiedad de Falta de Memoria o Amnesia de la Distribución Exponencial.** Supongamos que tiene una distribución exponencial. Demuestre que para los números y

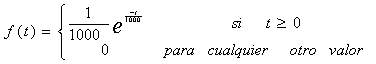
**Demostración.** Como

Ahora calculamos las probabilidades en el numerador y denominador

Dividiendo las exponenciales obtenemos

**Ejemplo 4.** El tiempo de vida de un circuito obedece una ley exponencial, con parámetro 1000. Una compañía que produce estos circuitos desea garantizarlos por cierto tiempo. ¿Por cuántas horas se puede  garantizar su funcionamiento, de modo que la probabilidad de que el circuito funcione después del número de horas garantizadas sea del 95%?.

**Solución.** En este caso la f.d.p.(la función de densidad de probabilidad) está especificada por:



Sea *a* el número de horas por las que se garantiza el circuito. Entonces:

http://148.204.211.134/polilibros/Portal/Polilibros/P_terminados/PROBABILIDAD/doc/Unidad%203/3.9_archivos/image020.gif

Resolviendo para *a* se obtiene:

http://148.204.211.134/polilibros/Portal/Polilibros/P_terminados/PROBABILIDAD/doc/Unidad%203/3.9_archivos/image022.gif

**Ejercicios.**

1. Suponga que la duración, en días, de un componente electrónico es exponencial con . Encuentre la probabilidad de que el componente dure (a) menos de 60 días, (b) más de 240 días, (c) ¿cuál es la duración esperada?

Respuesta: (a) 0.393, (b) 0.135.

1. Considere el componente del ejercicio 1, Si el componente está aún trabajando después de 100 días, encuentre la probabilidad de que dure más de 340 días (a) sin usar la propiedad de perdida de memoria, (b) usando la propiedad.

Respuesta: 0.135